Verschiedene Problemlösestile mathematisch begabter Sechst- und SiebtklässlerInnen

Lea Schreiber
schreiber@uni-muenster.de

„Die Aufgabe habe ich durch das Durchprobieren der Möglichkeiten gelöst. Also ich wusste, dass ähm die mittleren Zahlen nicht zwei oder höher sein können. Und deswegen musste ich nur sehr wenig ausprobieren. […]

Ich habe nichts aufgeschrieben, weil ich, das hätte sich ja nicht gelohnt. Das wäre das gewesen, was ich sonst im Kopf gemacht habe und im Kopf wäre es noch schneller gegangen, also.“

(Florian, 6. Klasse)

Gliederung des Vortrags

1. Problemlage
2. Ziele der Arbeit
3. Theoretische Grundannahmen
4. Forschungsdesign
5. Erste Ergebnisse
6. Fazit und Ausblick

„The mathematican's main reason for existence is to solve problems, and that, therefore, mathematics *really* consists of its problems and solutions.“
(Halmos, 1980)

Problemlage

- Verstärkte Beachtung der schulischen Begabtenförderung (Benölken, Pfitzner & Veber, 2019)
- Grundrecht aller SchülerInnen auf optimale Bildung und individuelle Bildungschancen (Heller, 2015)
- Verankerung des Problemlösens als prozessbezogene Kompetenz in den Bildungsstandards für das Fach Mathematik (KMK, 2004)
    - Bearbeitung vorgegebener bzw. selbst formulierter Probleme
    - Auswahl und Anwendung geeigneter heuristischer Hilfsmittel, Strategien, Prinzipien zur Lösungsfindung
    - Überprüfung der Plausibilität der Ergebnisse, Finden von Lösungsideen und Reflektion der Lösungswege
- Problemlösen als eine der „höchsten Formen geistiger Aktivität“ (Betsch, Funke, & Plessner, 2011)

Problemlage

- Vielfältige Potenziale des Problemlösens und herausfordernder Problemaufgaben für mathematisch begabte Kinder (Käpnick, 2014)
- Problemlösen erfordert und fördert
  - Kompetenzen im selbstständigen Analysieren und Strukturieren eines mathematischen Sachverhalts sowie im selbstständigen Entwickeln von Lösungsansätzen.
  - allgemeine Persönlichkeitskompetenzen wie z.B. Anstrengungsbereitschaft, Konzentrationsvermögen.
- Untersuchung zu Problemlösestilen mathematisch (potenziell) begabter Dritt- und Viertklässler (Fuchs, 2006)

➡ **Problemlösestile mathematisch begabter SchülerInnen der Sekundarstufe?**

Ziele der Arbeit

1. Theoretisch-analytische und empirisch-konstruktive Bestimmung verschiedener Problemlösestile mathematisch begabter Sechst- und SiebtklässlerInnen

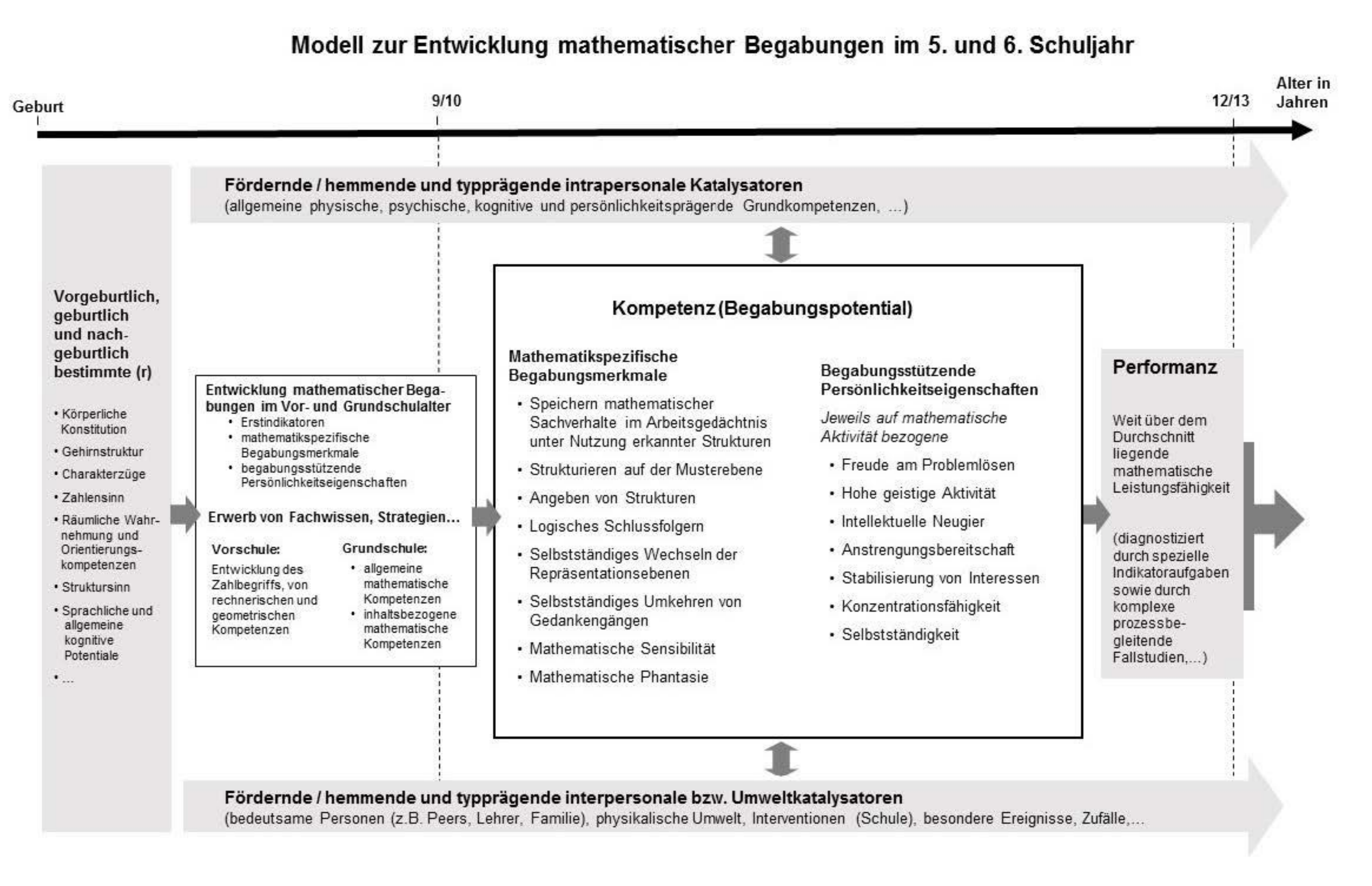
2. Analyse der Stabilität bzw. Instabilität der Problemlösestile mathematisch begabter Sechst- und SiebtklässlerInnen

Theoretische Grundannahmen zur mathematischen Begabung

- Der Themenkomplex „Begabung“ bzw. „Mathematische Begabung“ ist **hochkomplex** und lässt sich nur **interdisziplinär** erfassen.
- Mathematische Begabungen sind **bereichsspezifisch**. Das Wesen von Mathematik bestimmt diese Bereichsspezifik.
- Die Entwicklung einer jeglichen Begabung hat einen **dynamischen Charakter**.
- Eine Begabung kann sich umso **besser entfalten** kann, desto **früher** sie **erkannt und gefördert** wird.
- Es gibt nicht einen einheitlichen Begabungstyp, sondern viele **verschiedene Begabungs-ausprägungen** mit zum Teil konträren Merkmalen.

(Käpnick, 2016)

Theoretische Grund-annahmen zur mathematischen Begabung



(Sjuts, 2017)

Theoretische Grundannahmen zum Problemlösen

- **Problemlösen** meint laut Hussy (1984, S. 114) im Allgemeinen

  „das Bestreben, einen gegebenen Zustand (Ausgangs- oder Ist-Zustand) in einen anderen, gewünschten Zustand (Ziel- oder Soll-Zustand) zu überführen, wobei es gilt, eine Barriere zu überwinden, die sich zwischen Ausgangs- und Zielzustand befindet"

- **Problemlöseprozesse** sind durch vielfältige Wechselbeziehungen zwischen Problemaufgabe und Problemlöser gekennzeichnet. (Fuchs, 2006)

Theoretische Grundannahmen zum Problemlösen

- **Mathematische Problemaufgaben** sind gemäß Rasch (2001, S. 26) dadurch gekennzeichnet, dass ihnen

  „in der Regel anspruchsvolle mathematische Strukturen zugrunde liegen, die mitunter so in Sachsituationen eingebettet sind, dass die den Kindern vertrauten Grundmodelle der Rechenoperationen nicht ohne weiteres sichtbar bzw. nicht ohne Transformationsleistung anzuwenden sind.“

- **Routineaufgabe** (reproduktives Denken) vs. **Problemaufgabe** (produktives Denken)

Theoretische Grundannahmen zum Problemlösen

- Der Begriff **Problemlösestil** beschreibt die „Art und Weise, wie ein Kind
    - ein gegebenes Problem erfasst (Informationsaufnahme und Analyse des Problems),
    - das Problem zu lösen versucht (Entwicklung von Lösungsansätzen und -strategien, bevorzugte Handlungsebenen beim Problemlösen, spezifischer Denk-, Lern- und Arbeitsstil beim Problembearbeiten),
    - die Lösung der Problemaufgabe darstellt und wie es diese kontrolliert.“
- Es werden sowohl kognitive Fähigkeiten als auch allgemeine Persönlichkeitseigenschaften und emotionale Aspekte des Problemlösers berücksichtigt.

(Fuchs, 2006)

Theoretische Grundannahmen zum Problemlösen

- Verschiedene **Problemlösestile** mathematisch begabter Dritt- und ViertklässlerInnen:
    - Hartnäckiges Probieren
    - Systemhaftes Vorgehen
    - Intuitives Erahnen bzw. Vortasten
    - Abwechselndes Überlegen und Probieren – Suchen nach Lösungsmustern
    - Mischtyp

(Fuchs, 2006)

Forschungsdesign

- Explorative Erkundungsuntersuchung mit qualitativer Ausrichtung

Interdisziplinäre Literaturanalyse
zur mathematischen Begabung sowie zum Problemlösen

Explorative Voruntersuchung
anhand von Beobachtungen im Projekt „Mathe für kleine Asse“

Konstruktion einer hypothetischen Modellierung
zu verschiedenen Problemlösestilen mathematisch begabter Sechst- und SiebtklässlerInnen

Empirische Überprüfung und vertiefende Erkundung

Forschungsdesign

Qualitative Untersuchung I

- Detaillierte Analyse verschiedener Problemlösestile mathematisch begabter Sechst- und SiebtklässlerInnen mittels längsschnittlich angelegten Einzelfallstudien
- Überprüfung der (In)Stabilität der Problemlösestile dieser SchülerInnen im Verlaufe zweier Schuljahre

→

- Durchführung halbstandardisierter Leitfadeninterviews mit den Probanden, ihren Eltern sowie ihren MathematiklehrerInnen
- Auswertung von Indikatoraufgaben-Tests
- Entwicklung und Einsatz von jeweils acht Problemaufgaben in der 6. und 7. Klasse, die per Videoaufzeichnung bzw. Beobachtungs-protokoll dokumentiert werden
- Durchführung leitfadengestützter Kurzinterviews zur Selbstreflexion des Problemlöseprozesses durch die Probanden

Forschungsdesign

Qualitative Untersuchung II

- Überprüfung der (In)Stabilität der Problemlösestile mathematisch begabter SchülerInnen der Sekundarstufen I bzw. II anhand von retrospektiv und längsschnittlich angelegten Einzelfallstudien

○ Qualitative Auswertung vorliegender Einzelfallstudien, Indikatoraufgaben-Tests und Eigenproduktionen von ehemaligen SchülerInnen des Projekts „Mathe für kleine Asse"

○ Durchführung eines retrospektiv angelegten Leitfadeninterviews mit besagten SchülerInnen sowie LeiterInnen des Projekts

Erste Ergebnisse

Hypothetische Veränderungen der Problemlösestile von SchülerInnen der 3./4. hin zur 6./7. Klasse

- Der Problemlösestil Hartnäckiges Probieren spielt keine wichtige Rolle mehr.
- Der Problemlösestil Abwechselndes Überlegen und Probieren – Suchen nach Lösungsmustern kommt bei SchülerInnen der 6./7. Klasse gleichermaßen häufig vor.
- Die Problemlösestile Intuitives Vortasten bzw. Erahnen und Systemhaftes Vorgehen sind ausgeprägter.
- Der Problemlösestil Systemhaftes Vorgehen kann in zwei Typen unterteilt werden, die sich bezüglich der bevorzugten Handlungs- und Repräsentationsebene unterscheiden.

Erste Ergebnisse

Fallbeispiel Florian

- ist 12 Jahre alt und geht in die 7. Klasse eines Gymnasiums.
- besitzt sehr hohe mathematische Kompetenzen.
- erreichte mit $62\frac{2}{3}$ von insgesamt 75 möglichen Punkten die drittbeste Leistung im Indikatoraufgaben-Test der Klassen 5/6 (n = 57).
- besitzt eine sehr stark ausgeprägte mathematische Sensibilität sowie besondere Fähigkeiten im Strukturieren mathematischer Sachverhalte.
- ist ein sehr ausgeglichener und ruhiger Junge.

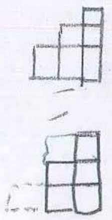
Erste Ergebnisse

Fallbeispiel Florian

B: Die Summe von drei aufeinander folgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar.

☒ Wahr ☐ Falsch ✓ 1P

Geometrische Darstellung:



✓ 2P

Begründung:

Ja, denn eine Zahl von ihnen ist durch 3 teilbar, bei einer bleibt 1 übrig und bei der übrig gebliebenen bleiben 2 übrig also schiebt man die übrigen Würfel/Plättchen/Scheiben… zusammen und erhält 3.

✓ 3P

6

c) Cora und Paul spielen folgendes Partnerspiel:
Auf dem Tisch liegen 25 Plättchen. Jedes Kind nimmt abwechselnd 1, 2, 3 oder 4 Plättchen weg. Wer von beiden das letzte Plättchen wegnehmen darf, hat gewonnen.
Welche Strategie muss man anwenden, wenn man dieses Spiel immer gewinnen will?

Lösung: ~~5, 9, 11, 15, 19, 24~~ 0, 4, 9, 14, 19, 24

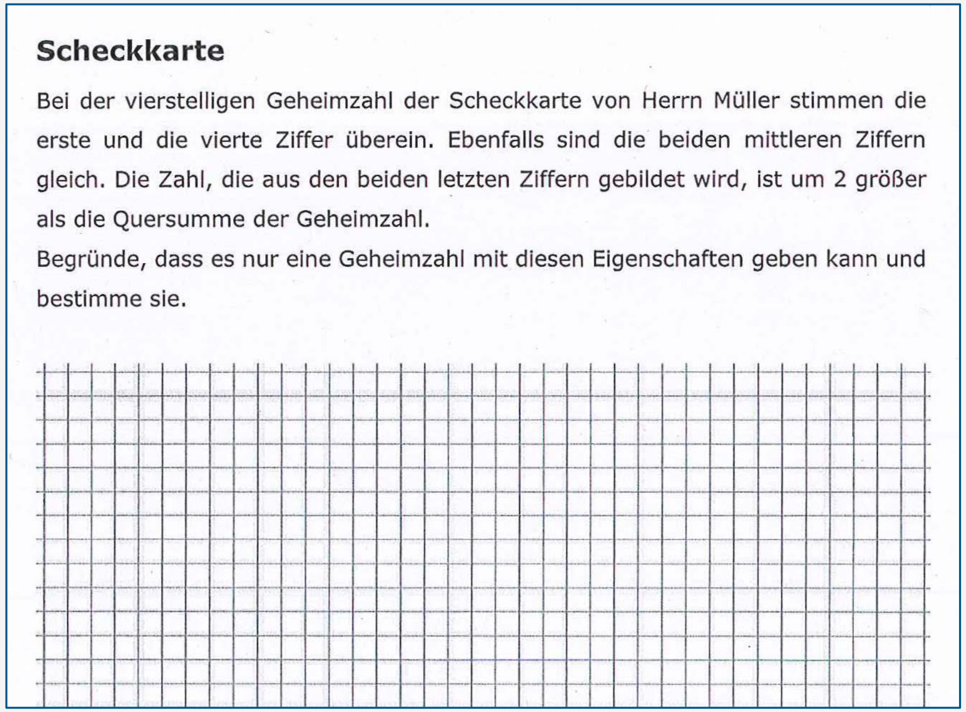
Man muss anfangen und 1 wegnehmen. Ab jetzt nimmt man immer so viele, dass in jeder Runde insgesamt 5 Plättchen weggenommen wurden.

✓ 3P.

Exemplarische Lösungen
aus dem IA-Test der Klasse 5

Erste Ergebnisse

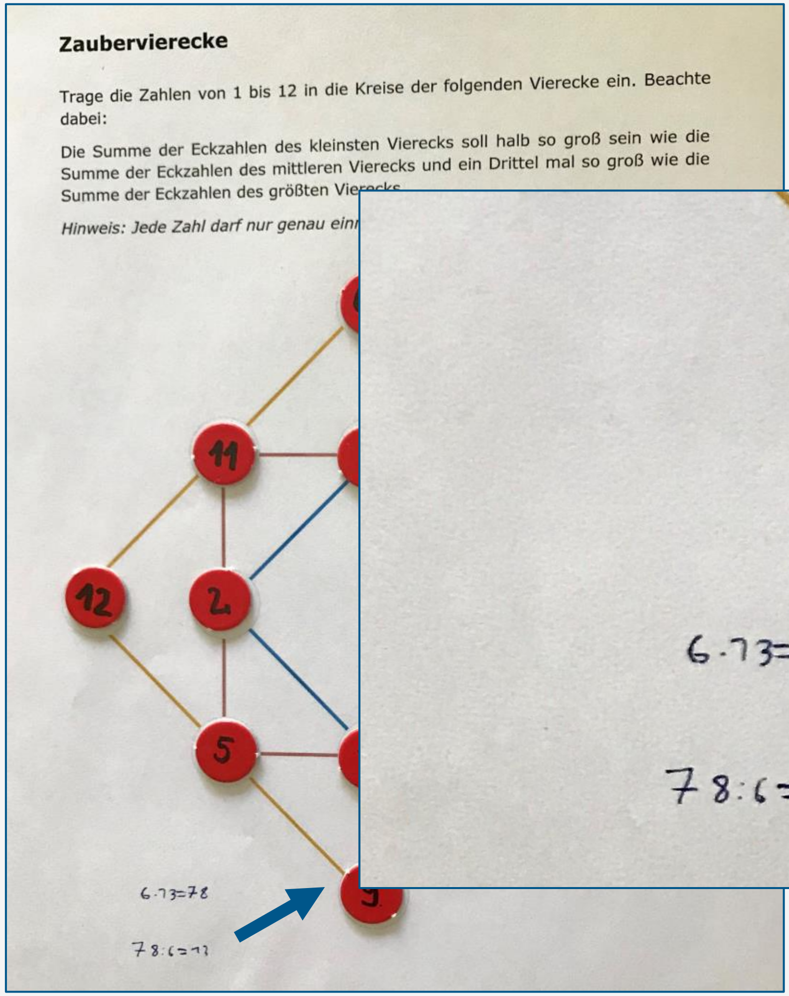
Fallbeispiel Florian

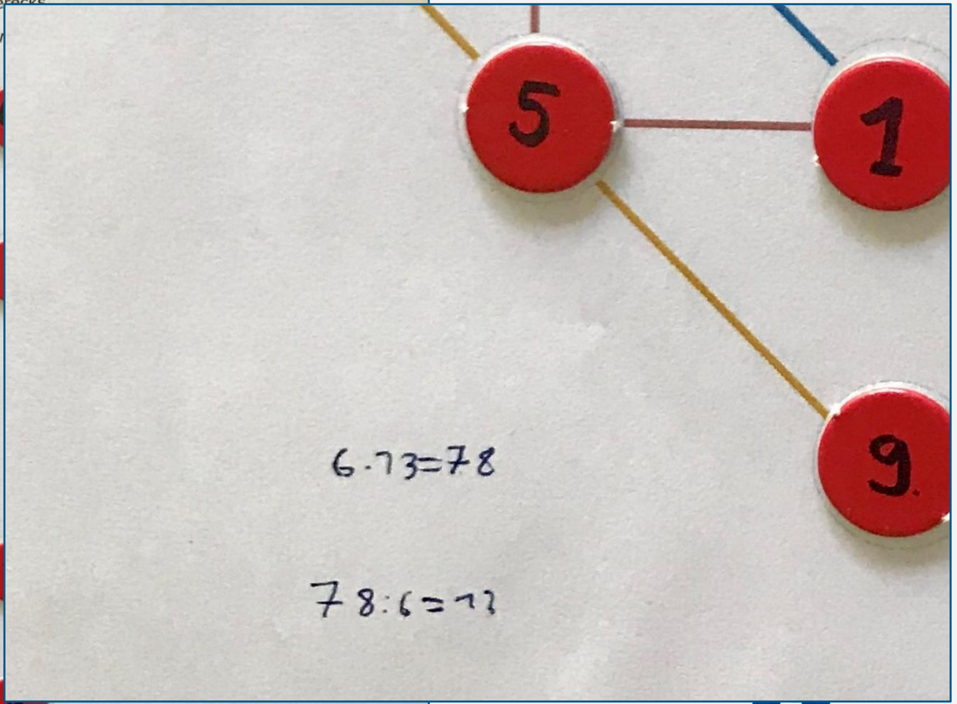


Scheckkarte

Bei der vierstelligen Geheimzahl der Scheckkarte von Herrn Müller stimmen die erste und die vierte Ziffer überein. Ebenfalls sind die beiden mittleren Ziffern gleich. Die Zahl, die aus den beiden letzten Ziffern gebildet wird, ist um 2 größer als die Quersumme der Geheimzahl.

Begründe, dass es nur eine Geheimzahl mit diesen Eigenschaften geben kann und bestimme sie.

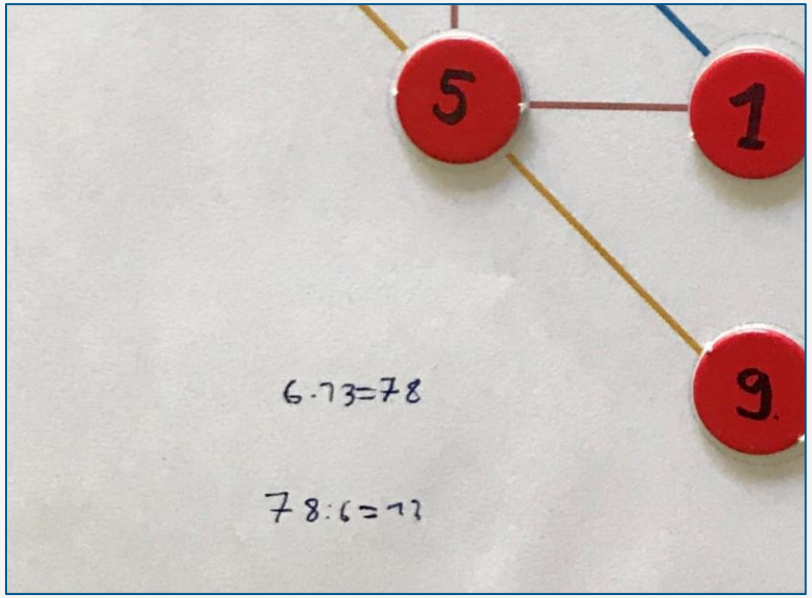




Exemplarische Lösungen der Problemaufgaben (Klasse 6)

Erste Ergebnisse

Fallbeispiel Florian



„Um die Zahlen 1 bis 12 zusammenzurechnen, habe ich einfach 13 mal 6 gerechnet, weil ich wollte nicht 1 plus 2 plus 3 plus 4 und so weiter rechnen und deswegen habe ich 13 mal 6 gerechnet.“

„Also ähm ich habe ja erst gedacht, eine andere Aufgabe sozusagen gedacht und dann hätte es nicht funktioniert, aber jetzt hat es funktioniert.“

„Ich arbeite lieber alleine, weil man sonst meistens nochmal was erklären muss, wenn man einen Geistesblitz oder so hat.“

Erste Ergebnisse

Fallbeispiel Florian – Fazit

- liest zu Beginn in Ruhe die Aufgabenstellung, wobei er z. T. nicht alle Aufgabenbedingungen erfasst.
- nimmt sich nach dem Lesen der Aufgabenstellung häufig Zeit, um über diese nachzudenken und schreibt zunächst nichts auf.
- abstrahiert die gegebenen mathematischen Sachverhalte, findet schnell Lösungsmuster und nutzt diese zum Lösen der Problemaufgaben (insbesondere zum Erstellen von Formeln).
- arbeitet bevorzugt auf der formal-symbolischen Ebene.
- schreibt seine Lösung(en) sehr knapp bzw. nicht auf.

Erste Ergebnisse

Hypothetischer Problemlösestil „Systemhaftes Vorgehen“

- geht streng systematisch, sachbetont und bestimmten Ordnungsprinzipien folgend an die Problemaufgabe heran
- handelt einem genauen Plan und einer zuvor aufgestellten Gedankenkette folgend
- besitzt eine hohe mathematische Sensibilität im Sinne eines stark ausgeprägten Gefühls für Zahlstrukturen und geometrische Muster
- arbeitet bevorzugt in Einzelarbeit
- hat einen ruhigen und ausgeglichenen Charakter sowie einen hohen Selbstanspruch

Erste Ergebnisse

Hypothetischer Problemlösestil „Systemhaftes Vorgehen“

Typ A	Typ B
• arbeitet bevorzugt auf der formal-symbolischen Ebene • abstrahiert den math. Sachverhalt stark • möglichst knappe Lösungsdarstellung und meist keine Lösungskontrolle bzw. -reflexion	• wechselt flexibel die Repräsentationsebenen abhängig von der Aufgabenpräsentation sowie der Lösungsidee • stellt die Lösung(en) vollständig und z. T. sehr ordentlich dar • selbstständige Lösungskontrolle bzw. -reflexion

Fazit und Ausblick

Ziele der Arbeit:

1. Theoretisch-analytische und empirisch-konstruktive Bestimmung verschiedener Problemlösestile mathematisch begabter Sechst- und SiebtklässlerInnen

   - Untersuchung weiterer mathematisch begabter Sechst- und SiebtklässlerInnen mit möglichst verschiedenen Problemlösestilen
   - Erstellen von differenzierten Einzelfallstudien
   - Typisierung und Überprüfung der hypothetischen Modellierung

Fazit und Ausblick

Ziele der Arbeit:

2. Analyse der Stabilität bzw. Instabilität der Problemlösestile mathematisch begabter Sechst- und SiebtklässlerInnen

    - Analyse und Vergleich der durchgeführten Problemaufgaben in den Klassen 6 und 7

    - Durchführung der qualitativen Untersuchung II

➡ Ableitung von Maßnahmen bzgl. verschiedener Problemlösestile für die Schulpraxis

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Literatur

Benölken, R, Pfitzner, M. & Veber, M. (2019). Potenzialorientierte Förderung in den Fachdidaktiken. Münster: Waxmann.

Betsch, T., Funke, J. & Plessner, H. (2011). *Denken – Urteilen, Entscheiden, Problemlösen*. Berlin: Springer.

Fuchs, M. (2006). *Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen*. Dissertation. Berlin: LIT.

Guder, K. U. (2002). *Sichtweisen zu Lern- und Leistungsschwierigkeiten im Mathematikunterricht der Grundschule*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Halmos, P. R. (1980). The Heart of Mathematics. *The American Mathematical Monthly, Vol. 87(7)*, 519-524.

Heller, K. A. (2015). Begabungsförderung und Schulleistungsentwicklung: Ideologische Irrtümer und wissenschaftliche Fakten. In C. Fischer, C. Fischer-Ontrup, F. Käpnick, F.-J. Mönks & C. Solzbacher (Hrsg.), *Giftedness Across the Lifespan – Begabungsförderung von der frühen Kindheit bis ins Alter. Forder- und Förderkonzepte aus der Forschung* (S. 101-126). Berlin: LIT.

Literatur

Hussy, W. (1984). *Denkpsychologie: Ein Lehrbuch. Geschichte, Begriffs- und Problemlöseforschung, Intelligenz*. Stuttgart: Kohlhammer.

Käpnick, F. (2014). *Mathematiklernen in der Grundschule*. Berlin: Springer Spektrum.

Käpnick, F. (2016). Münstersche Studien zu mathematisch begabten Kindern in verschiedenen Altersbereichen. In Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. 1347-1348). Münster: WTM.

Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. 4. Auflage. Weinheim: Beltz Juventa.

KMK (Sekretariat der ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bunderepublik Deutschland, Hrsg.) (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. München: Luchterhand.

Sjuts, B. (2017). *Mathematisch begabte Fünft- und Sechstklässler*. Dissertation. WTM: Münster.